Devoir Surveillé n°6 Correction

EXERCICE 1

9 points

1. **(2pts)** g est une solution de (E) donc : $g'(x) - 3g(x) = 2\cos(x) - \sin(x)$
 $\Leftrightarrow -a\sin(x) + b\cos(x) - 3a\cos(x) - 3b\sin(x) = 2\cos(x) - \sin(x)$
 $\Leftrightarrow \sin(x)(-a - 3b) + \cos(x)(b - 3a) = 2\cos(x) - \sin(x)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} -a - 3b = -1 \\ b - 3a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 1/2 \end{cases}$

La fonction recherchée est donc $g(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$.

2. **(2pts)** $f - g$ est une solution de l'équation différentielle (E_0)
 $\Leftrightarrow (f - g)' - 3(f - g) = 0$
 $\Leftrightarrow f' - g' - 3f + 3g = 0$
 $\Leftrightarrow f' - 3f = g' - 3g$
 $\Leftrightarrow f' - 3f = 2\cos(x) - \sin(x)$ (car g est solution de (E))
 $\Leftrightarrow f$ est solution de (E) .

3. **(1pt)** (E_0) est de la forme $y' = ay$ avec $a = 3$ donc les solutions de (E_0) sont de la forme : $ke^{ax} = ke^{3x}$.

4. **(2pts)** D'après la question 2 : f est solution de $(E) \Leftrightarrow f - g$ est une solution de l'équation différentielle (E_0) : $y' - 3y = 0$.

Donc on a par la question 3 : $f(x) - g(x) = ke^{3x}$.

Ainsi : $f_k(x) = ke^{3x} + g(x) = ke^{3x} - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$.

5. **(2pts)** On souhaite : $f(0) = 0$. Donc on a : $f(0) = ke^{3 \times 0} - \frac{1}{2}\cos(0) + \frac{1}{2}\sin(0) = k - \frac{1}{2} + 0 = k - \frac{1}{2}$.

Ainsi : $k - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$.

D'où : $f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$.

EXERCICE 2

11 points

1. **(1pt)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = \ln(1) = 0$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}x = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. **(2pts)** $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} + \frac{1}{4} = \frac{e^x \times (-e^{-x})}{e^x \times (1 + e^{-x})} + \frac{1}{4} = \frac{-1}{e^x + 1} + \frac{e^x + 1}{4(e^x + 1)} = \frac{-4 + e^x + 1}{4(e^x + 1)} = \frac{e^x - 3}{4(e^x + 1)}$

3. **(2pts)** Sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $e^x - 3$.

$$e^x - 3 \geq 0 \iff e^x \geq 3 \iff x \geq \ln(3)$$

Donc :

- sur $]-\infty ; \ln(3)[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante ;
- sur $]\ln(3) ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante ;
- la fonction f admet pour $x = \ln(3)$ un minimum.

4. **(2pts)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue. De plus $\ln(3) \approx 1,1$ donc $[2 ; 5] \subset]\ln(3) ; +\infty[$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $[2 ; 5]$. On a : $f(2) \approx 0,63 < 1 < f(5) \approx 6,25$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut déduire que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $[2 ; 5]$.

5. **(1pt)** Pour tout réel x :

- $e^x > 0$;
- $e^x > 0$ donc $e^x + 1 > 0$ donc $(e^x + 1)^2 > 0$.

$$\text{Donc } f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0.$$

6. **(1pt)** Par la question précédente, on en déduit que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'' > 0$.

7. **(2pts)** $f(x) = \frac{1}{4}x + \ln(2 - e^{-x}) \implies \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}x + \ln(2 - e^{-x}) \implies \ln(1 + e^{-x}) = \ln(2 - e^{-x})$
 $\implies 1 + e^{-x} = 2 - e^{-x} \implies 2e^{-x} = 1 \implies -x = \ln(1/2) \implies x = \ln(2)$.