Devoir Surveillé n°8 Correction

Exercice 1 — 10 points

1. **(2pts)** $f(x+2\pi) = sin(x+2\pi)cos(x+2\pi) = sin(x)cos(x) = f(x)$ car les fonctions sin et cos sont 2π-périodique.
   Donc f est 2π-périodique.
   $f(-x) = sin(-x)cos(-x) = -sin(x)cos(x) = -f(x)$ car sin est impaire et cos est paire.
   Donc f est impaire.
2. **(2pts)** $f'(x) = cos(x)cos(x) - sin(x)sin(x) = cos(x)^2 - sin(x)^2 = 1 - sin(x)^2 - sin(x)^2 = 1 - 2sin(x)^2$
   $$= 2\left(\frac{1}{2} - sin(x)^2\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - sin(x)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + sin(x)\right).$$
3. **(2pts)** On résout $f'(x) = 0 \Longrightarrow 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - sin(x)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + sin(x)\right) = 0 \Longrightarrow sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
   Or $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc la seule solution est $x = \frac{\pi}{4}$. Voici donc le tableau de variations :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

4. **(2pts)** Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on observe que $f(x) \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Donc f est positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
5. **(2pts)** f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0,12 > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α à l'équation $f(x) = 0,12$.
   On a : $\alpha \simeq 1,45$.

Exercice 2 — 7 points

1. **(1pt)** $I_0 = \int_0^1 x^0 e^{-x}\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + e^0 = 1 - e^{-1}$.
2. (a) **(1pt)** On sait par l'énoncé que $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$ donc $x^n \geqslant 0$. De plus $e^{-x} > 0$. Donc $x^n e^{-x} \geqslant 0$. Ainsi en intégrant, $I_n \geqslant 0$.
   (b) **(2pts)** $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,dx - \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^n e^{-x}(x-1)\,dx$.
   Or comme $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $x - 1 \leqslant 0$ et $x^n e^{-x} \geqslant 0$. Ainsi $x^n e^{-x}(x-1) \leqslant 0$ d'où $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
   (I_n) est donc décroissante.
   (c) **(1pt)** (I_n) est minorée par 0 (question 2a) et décroissante (question 2b) donc elle converge, d'après le théorème de convergence.
3. (a) **(1pt)** On sait que $x \in [0;1]$ donc $x \geqslant 0$ d'où $e^{-x} \leqslant 1$. Ainsi, $x^n e^{-x} \leqslant x^n$. Et en intégrant on obtient : $I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,dx$.
   (b) **(1pt)** $\int_0^1 x^n\,dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.
   Comme de plus (I_n) est minorée par 0 alors on a : $0 \leqslant I_n \leqslant 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 3 — 3 points

(1pt) On pose $u = x$ et $v' = cos(x)$. Donc $u' = 1$ et $v = sin(x)$.

(2pts) Par la formule d'intégration par parties, on obtient :
$$I = \int_0^{\pi/2} xcos(x)\,dx = [xsin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \times sin(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \times 1 - 0 - [-cos(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - (0+1) = \frac{\pi}{2} - 1 \simeq 0,57.$$