

1 Le principe

1.1 Les étapes de raisonnement

Initialisation

On doit vérifier que ce que l'on veut montrer (encadrement, formule...) est vérifié pour un certain rang. On fera donc la vérification pour le rang 0 ou le rang 1 ou etc. Cette propriété sera donc vérifiée à partir de ce rang.

Hérédité

On va supposer que ce que l'on veut montrer est vrai pour un certain rang k . En utilisant cette supposition, on doit montrer que cela reste vrai pour le rang suivant $k + 1$.

Conclusion

Elle permet de résumer la démarche et le résultat obtenu.

1.2 Les trois grands types de raisonnement

- Encadrement, majoration, minoration : dans l'hérédité, il faudra toujours partir des inégalités avec u_k afin de construire les inégalités pour u_{k+1} .
- Formule explicite : dans l'hérédité, il faudra toujours partir du lien existant entre u_{k+1} et u_k .
- Utilisation d'une fonction : on utilisera ici une fonction f définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Cela permettra de prouver la croissance, décroissance ou l'encadrement d'une suite. Dans l'hérédité, il suffira de vérifier que la fonction est croissante afin de conserver les inégalités.

2 Exemples

On considère une suite définie par la relation $u_{n+1} = 2u_n + 5$ avec $u_0 = 7$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 12 \times 2^n - 5$.

Résolution

On veut montrer par récurrence la propriété, pour tout entier naturel n , $P(n) : u_n = 12 \times 2^n - 5$.

Initialisation

On a $P(0) : u_0 = 12 \times 2^0 - 5 = 12 - 5 = 7$. D'après l'énoncé : $u_0 = 7$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété $P(k) : u_k = 12 \times 2^k - 5$ vraie. On veut montrer qu'elle est vraie au rang $P(k + 1) : u_{k+1} = 12 \times 2^{k+1} - 5$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k + 5 && \text{(relation donnée dans l'énoncé)} \\ &= 2(12 \times 2^k - 5) + 5 && \text{(on a remplacé } u_k \text{ par l'hypothèse de récurrence } P(k)) \\ &= 2 \times 12 \times 2^k - 2 \times 5 + 5 \\ &= 12 \times 2^{k+1} - 10 + 5 \\ &= 12 \times 2^{k+1} - 5 && \text{(on retrouve bien la formule } P(k + 1) \text{ souhaitée)} \end{aligned}$$

Donc la propriété au rang $P(k + 1)$ est vraie.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vérifiée pour tout entier naturel n .

Exercice 1

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n + 1}$.

Exercice 3

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ est un multiple de 9.

Exercice 4

On considère la proposition suivante : $P(n) : 4^n - 1$ est divisible par 3. Montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

On considère une suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 6

Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$