

Interrogation n°1 Correction (Sujet A)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = 2u_n - 4$.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3 \times 2^n + 4$.

On veut montrer par récurrence la propriété, pour tout entier naturel n , $P(n) : u_n = 3 \times 2^n + 4$.

Initialisation

On a $P(0) : u_0 = 3 \times 2^0 + 4 = 3 + 4 = 7$. D'après l'énoncé : $u_0 = 7$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété $P(k) : u_k = 3 \times 2^k + 4$ vraie. On veut montrer qu'elle est vraie au rang $P(k+1) : u_{k+1} = 3 \times 2^{k+1} + 4$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - 4 \\ &= 2(3 \times 2^k + 4) - 4 \\ &= 2 \times 3 \times 2^k + 2 \times 4 - 4 \\ &= 3 \times 2^{k+1} + 8 - 4 \\ &= 3 \times 2^{k+1} + 4 \end{aligned}$$

Donc la propriété au rang $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vérifiée pour tout entier naturel n .

Interrogation n°1 Correction (Sujet B)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3 - 2^n$.

On veut montrer par récurrence la propriété, pour tout entier naturel n , $P(n) : u_n = 3 - 2^n$.

Initialisation

On a $P(0) : u_0 = 3 - 2^0 = 3 - 1 = 2$. D'après l'énoncé : $u_0 = 2$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété $P(k) : u_k = 3 - 2^k$ vraie. On veut montrer qu'elle est vraie au rang $P(k+1) : u_{k+1} = 3 - 2^{k+1}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - 3 \\ &= 2(3 - 2^k) - 3 \\ &= 2 \times 3 - 2 \times 2^k - 3 \\ &= 6 - 2^{k+1} - 3 \\ &= 3 - 2^{k+1} \end{aligned}$$

Donc la propriété au rang $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vérifiée pour tout entier naturel n .

Barème (10 pts)

Calculs initialisation : $P(0)$ 1 pt + énoncé 0,5 pt = 1,5 pts.

Rédaction initialisation : $P(0)$ vraie = 0,5 pt.

Rédaction hérédité : soit k 1 pt + $P(k)$ 1 pt + $P(k+1)$ 1,5 pt + $P(k+1)$ vraie 0,5 pt = 4 pts.

Calculs hérédité : 3 pts.

Rédaction conclusion : 1 pt.