Interrogation n°4 Correction (Sujet A)

$\mathcal{P}$ est le plan qui passe par le point $B(1;0;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$.

(d) est la droite qui passe par le point $A(0;1;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. **(3pts)** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
2. **(3pts)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
3. **(2pts)** Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ et que la droite (d) sont sécants.
4. **(2pts)** Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) et du plan $\mathcal{P}$.

1. Soit $M(x;y;z)\in\mathcal{P}$. Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donnée par :
$\overrightarrow{BM}.\vec{n}=0 \iff \begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z+1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=0 \iff (x-1)\times 0+y\times 1+(z+1)\times 3=0 \iff y+3z+3=0.$
2. Soit $M(x;y;z)\in(d)$. Une représentation paramétrique de la droite (d) est donnée par :
$\exists t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u} \iff \exists t\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix}x-0\\y-1\\z+1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{lcl}x&=&2t\\y&=&1+t\\z&=&-1+t\end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$
3. On a : $\vec{u}.\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=2\times 0+1\times 1+1\times 3=0+1+3=4\neq 0$. On peut donc en déduire $\mathcal{P}$ et (d) ne sont pas parallèles : ils sont sécants.
4. On résout donc le système ci-dessous pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) et du plan $\mathcal{P}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl}x&=&2t\\y&=&1+t\\z&=&-1+t\\y+3z+3&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&2t\\y&=&1+t\\z&=&-1+t\\1+t-3+3t+3&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&2t\\y&=&1+t\\z&=&-1+t\\t&=&-\frac{1}{4}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&-\frac{2}{4}\\y&=&\frac{3}{4}\\z&=&-\frac{5}{4}\\t&=&-\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

D'où le point d'intersection de coordonnées $\left(-\frac{2}{4};\frac{3}{4};-\frac{5}{4}\right)$.

Interrogation n°4 Correction (Sujet B)

$\mathcal{P}$ est le plan qui passe par le point $B(0;1;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

(d) est la droite qui passe par le point $A(1;0;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$.

1. **(3pts)** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
2. **(3pts)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
3. **(2pts)** Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ et que la droite (d) sont sécants.
4. **(2pts)**Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) et du plan $\mathcal{P}$.

1. Soit $M(x;y;z)\in\mathcal{P}$. Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donnée par :
$\overrightarrow{BM}.\vec{n}=0 \iff \begin{pmatrix}x\\y-1\\z+1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=0 \iff x\times 2+(y-1)\times 1+(z+1)\times 1=0 \iff 2x+y+z=0.$
2. Soit $M(x;y;z)\in(d)$. Une représentation paramétrique de la droite (d) est donnée par :
$\exists t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u} \iff \exists t\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix}x-1\\y\\z+1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{lcl}x&=&1\\y&=&t\\z&=&-1+3t\end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$
3. On a : $\vec{n}.\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=2\times 0+1\times 1+1\times 3=0+1+3=4\neq 0$. On peut donc en déduire $\mathcal{P}$ et (d) ne sont pas parallèles : ils sont sécants.
4. On résout donc le système ci-dessous pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) et du plan $\mathcal{P}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl}x&=&1\\y&=&t\\z&=&-1+3t\\2x+y+z&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&1\\y&=&t\\z&=&-1+3t\\2+t-1+3t&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&1\\y&=&t\\z&=&-1+3t\\t&=&-\frac{1}{4}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&1\\y&=&-\frac{1}{4}\\z&=&-\frac{7}{4}\\t&=&-\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

D'où le point d'intersection de coordonnées $\left(1;-\frac{1}{4};-\frac{7}{4}\right)$.