# RÉVISIONS - SPÉCIALITÉ MATHS

## Exercice 1 : Suites

La suite $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

**1.** Calculer, en détaillant les calculs, $u_1$ et $u_2$ sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite $(u_n)$.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $n$ | $u_n$ |
| 2 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1,75 |
| 4 | 2 | 2,562 5 |
| 5 | 3 | 3,421 875 |
| 6 | 4 | 4,316 406 25 |

**2.** **a.** Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de $(u_n)$ dans la colonne B?

**b.** Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)$.

**3.** **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

**b.** En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)$.

**c.** Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

**4.** On désigne par $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

**a.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

**b.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$,on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

## Exercice 2 : Suites

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout entier naturel $n$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= v_0 = 1 \\ u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ **sont strictement positives**.

**1.** **a.** Calculez $u_1$ et $v_1$.

**b.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel $n$, $v_n \geqslant 1$.

**c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n \geqslant n+1$.

**d.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**2.** On pose, pour tout entier naturel $n$ : $r_n = \dfrac{v_n}{u_n}$. On admet que : $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$

**a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}.$$

**b.** En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

**c.** Déterminer la limite de la suite $\left(r_n^2\right)$ et en déduire que $(r_n)$ converge vers $\sqrt{2}$.

**d.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$,

$$r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n}.$$

## Exercice 3 : Suites

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.
Elle sort les gâteaux du congélateur à $-19$ °C et les apporte sur la terrasse où la température est de 25 °C.
Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de 1,3 °C.

**I – Premier modèle**

On suppose que la vitesse de décongélation est constante c'est-à-dire que l'augmentation de la température est la même minute après minute.
Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.
Ce modèle semble-t-il pertinent?

**II – Second modèle**

On note $T_n$ la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de $n$ minutes après leur sortie du congélateur; ainsi $T_0 = -19$.
On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante

Pour tout entier naturel $n$, $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$.

**1.** Justifier que, pour tout entier $n$, on a $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$

**2.** Calculer $T_1$ et $T_2$. On donnera des valeurs arrondies au dixième.

**3.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a $T_n \leqslant 25$.
En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible?

**4.** Étudier le sens de variation de la suite $(T_n)$.

**5.** Démontrer que la suite $(T_n)$ est convergente.

**6.** On pose pour tout entier naturel $n$, $U_n = T_n - 25$.

**a.** Montrer que la suite $(U_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme $U_0$.

**b.** En déduire que pour tout entier naturel $n$, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.

**c.** En déduire la limite de la suite $(T_n)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.

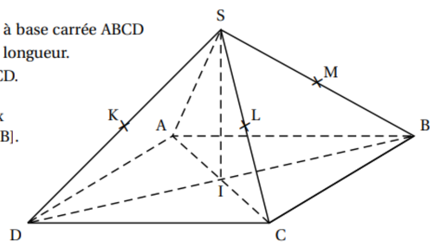
**7.** **a.** Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur.
Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.

**b.** Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10 °C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.

## Exercice 4 : Géométrie

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*
*Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*
*Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.*
*Aucune justification n'est demandée.*

SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].




**1.** Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

**a.** (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(I\,;\,\overrightarrow{IC},\,\overrightarrow{IB},\,\overrightarrow{IS}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

I(0 ; 0 ; 0) ; A(−1 ; 0 ; 0) ; B(0 ; 1 ; 0) ; C(1 ; 0 ; 0);D(0 ; −1 ; 0) ; S(0 ; 0 ; 1).

**2.** Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

**a.** $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$

**3.** Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :

**a.** $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

**4.** Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

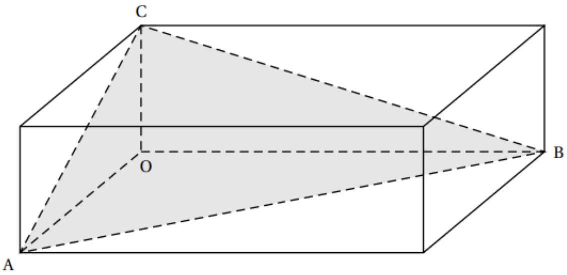
**a.** $\begin{cases} x = -1-t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 0 \\ z = 1+2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **c.** $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **d.** $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

**5.** Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

**a.** $y+z-1=0$ **b.** $x+y+z-1=0$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

## Exercice 5 : Géométrie

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points : A de coordonnées $(2;0;0)$, B de coordonnées $(0;3;0)$ et C de coordonnées $(0;0;1)$.




L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

   **b.** En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x+2y+6z-6=0$.

2. On note $d$ la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

   **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $d$.

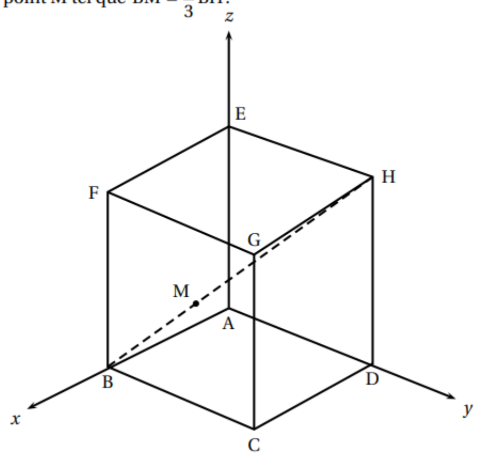
   **b.** Montrer que la droite $d$ coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49};\frac{12}{49};\frac{36}{49}\right)$.

   **c.** Calculer la distance OH.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V=\frac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et $h$ est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

## Exercice 6 : Géométrie

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.
On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.




1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.
2. **a.** Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

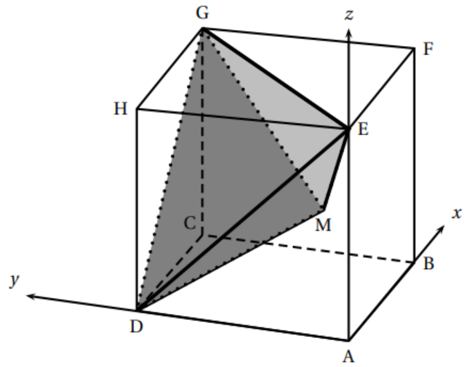
   **b.** On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté $c$ est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.
   Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.
4. **a.** Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1;1;1)$ est normal au plan (EGD).

   **b.** En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x+y+z-1=0$.

   **c.** Soit $\mathscr{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.
   Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathscr{D}:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{2}{3}-t \\ y & = & \frac{1}{3}+t \\ z & = & \frac{1}{3}+t \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :




Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

   **a.** Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.
   Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

   **b.** En déduire le volume de la pyramide GEDM.
   *On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule* $V=\frac{b\times h}{3}$ *où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.*

## Exercice 7 : Fonctions

**Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[1;4]$ par :

$$f(x)=-30x+50+35\ln x.$$

1. On rappelle que $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$.

   **a.** Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[1;4]$, montrer que :
$$f'(x)=\frac{35-30x}{x}.$$

   **b.** Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1;4]$.

   **c.** En déduire les variations de $f$ sur ce même intervalle.
2. Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution, notée $\alpha$, sur l'intervalle $[1;4]$ puis donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.
3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x\in[1;4]$.

**Partie 2 : Optimisation**

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour $x$ milliers de litres vendus, avec $x$ nombre réel de l'intervalle $[1;4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x)=-15x^2+15x+35x\ln x.$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.
   On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.
2. Pour tout $x$ de l'intervalle $[1;4]$, montrer que $B'(x)=f(x)$ où $B'$ désigne la fonction dérivée de $B$.
3. **a.** À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction $B$ sur l'intervalle $[1;4]$.

   **b.** En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

## Exercice 8 : Fonctions

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé.

1. **a.** Préciser la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

   **b.** Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :

   $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$ où $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$.
3. Déterminer les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On établira un tableau de variations de la fonction $f$ dans lequel apparaîtront les limites.
4. Soit $m$ un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel $m$, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.
5. On note $\Delta$ la droite d'équation $y=-x$.
   On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a$ en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite $\Delta$.

   **a.** Montrer que $a$ est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1)+x^2=0$.
   On note $g$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^x(x-1)+x^2$.
   On admet que la fonction $g$ est dérivable et on note $g'$ sa fonction dérivée.

   **b.** Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de $g$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

   **c.** Montrer qu'il existe un unique point $A$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite $\Delta$.

## Exercice 9 : Fonctions

**Partie A**

Soit $g$ la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$, par

$$g(x)=x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{4}{(1+\mathrm{e}^x)^2}.$$

On admet que la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note $g'$ sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de $g$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On admet que la fonction $g'$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et que $g'(0)=0$.
   Déterminer le signe de la fonction $g'$ sur $\mathbf{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $g$ et calculer le minimum de la fonction $g$ sur $\mathbf{R}$.

**Partie B**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x)=3-\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, représentée dans la **figure** ci-dessous.

Soit A le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,3\right)$.

1. Démontrer que le point B$(0\,;2)$ appartient à $\mathscr{C}_f$.
2. Soit $x$ un réel quelconque.
   On note $M$ le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x\,;\,f(x))$.
   Démontrer que A$M^2=g(x)$.
3. On admet que la distance A$M$ est minimale si et seulement si A$M^2$ est minimal.
   Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que la distance A$M$ est minimale.
4. On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

   **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$.

   **b.** Soit $T$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.
   Démontrer que l'équation réduite de $T$ est $y=\dfrac{x}{2}+2$.
5. Démontrer que la droite $T$ est perpendiculaire à la droite (AB).

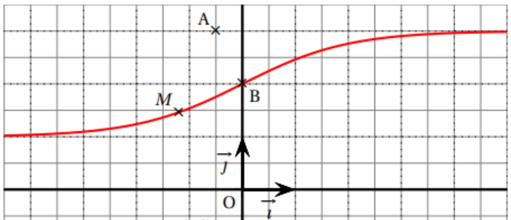


Figure de l'exercice 3, partie B.

## Exercice 10 : Fonctions

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=x+4-4\ln(x)-\dfrac{3}{x}$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
2. On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout nombre réel $x>0$, on a :

   $$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2}.$$
3. **a.** Donner le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.
   On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

   **b.** Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x)=\dfrac{5}{3}$.
4. Étudier la convexité de la fonction $f$ c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ sur lesquelles $f$ est convexe, et celles sur lesquelles $f$ est concave.
   On justifiera que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

## Exercice 11 : Probabilités

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

**Partie 1**

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- $D$ l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- $A$ l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements $D$ et $A$ respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement $A$ est égale à 0,24.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

**Partie 2**

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.
   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par $X$ la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

   **a.** On admet que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?

   **b.** Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.

   **c.** Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.
2. Un lycée présente $n$ candidats au recrutement dans cette école, où $n$ est un entier naturel non nul.
   On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

   **a.** Donner l'expression, en fonction de $n$, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

   **b.** À partir de quelle valeur de l'entier $n$ la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?

## Exercice 12 : Probabilités

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*
*Aucune justification n'est demandée.*

**PARTIE I**

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.
Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.
On admet que $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,03$.

**1.** La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

**a.** 0 **b.** 1 **c.** 0,24 **d.** 0,76

**2.** La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

**a.** $\binom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ **b.** $\binom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$
**c.** $\binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$ **d.** $\binom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

**3.** La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

**a.** $P(X < 1)$ **b.** $P(X \leqslant 1)$ **c.** $P(X \geqslant 2)$ **d.** $1 - P(X = 0)$

**PARTIE II**

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.
On considère les évènements suivants :

- $V_1$ : « la première boule tirée est verte » ;
- $B_1$ : « la première boule tirée est blanche » ;
- $V_2$ : « la seconde boule tirée est verte » ;
- $B_2$ : « la seconde boule tirée est blanche ».

**4.** La probabilité de $V_2$ sachant que $V_1$ est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :

**a.** $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{4}{7}$ **c.** $\frac{5}{14}$ **d.** $\frac{20}{56}$

**5.** La probabilité de l'évènement $V_2$ est égale à :

**a.** $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{5}{7}$ **c.** $\frac{3}{28}$ **d.** $\frac{9}{7}$

## Exercice 13 : Probabilités

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à $10^{-3}$.
Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

**Partie A**

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note $D$ l'évènement « l'athlète est dopé » et $T$ l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement $D$ est égale à 0,08.

**1.** Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.

**2.** Démontrer que $P(T) = 0,083$.

**3.** **a.** Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé?

**b.** Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95.
Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé? Justifier.

**Partie B**

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103.

**1.** Dans cette question **1.**, on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

**a.** Donner la loi suivie par la variable aléatoire $X$. Préciser ses paramètres.

**b.** Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**c.** Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif?

**2.** Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75? Justifier.

## Exercice 14 : Suites - Probabilités

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

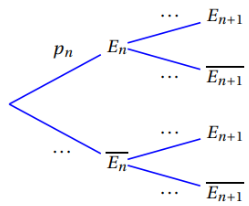
- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine $n$ le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine $n$ le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, par $E_n$ l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la $n$-ième semaine ».
On note $p_n$ la probabilité de l'évènement $E_n$.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

**1.** **a.** Déterminer la valeur de $p_3$ à l'aide d'un arbre de probabilité.

**b.** Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

**2.** **a.** Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous




**b.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

**c.** Montrer que la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison $r$.
En déduire l'expression de $u_n$ puis de $p_n$ en fonction de $n$ et $r$.

**d.** En déduire la limite de la suite $(p_n)$.

## Exercice 15 : Suites - Probabilités

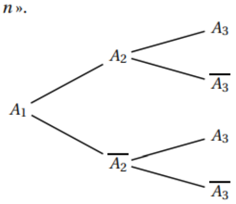
Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes. Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;

— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note $A_n$ l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine $n$ ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

**1.** **a.** Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.




**b.** Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.

**c.** Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2?
Arrondir au centième.

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$ : $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

**2.** Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

**3.** **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$ : $p_n > 0,8$.

**b.** Démontrer que la suite $(p_n)$ est décroissante.

**c.** La suite $(p_n)$ est-elle convergente?

**4.** On pose pour tout entier $n \geqslant 1$ : $v_n = p_n - 0,8$.

**a.** Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme $v_1$ et la raison.

**b.** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

**c.** Déterminer la limite de la suite $(p_n)$.

## Exercice 16 : Suites - Probabilités

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type $A$ et un jeu de type $B$.
On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

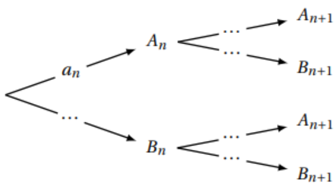
- si le joueur achève une partie de type $A$, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type $A$ avec une probabilité de $0,8$ ;
- si le joueur achève une partie de type $B$, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type $B$ avec une probabilité de $0,7$.

Pour une entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, on note $A_n$ et $B_n$ les évènements :
$A_n$ : «la $n$-ième partie est une partie de type $A$.»
$B_n$ : «la $n$-ième partie est une partie de type $B$.»
Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, on note $a_n$ la probabilité de l'évènement $A_n$.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci contre

   b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$




Dans la suite de l'exercice, on note $a$ la probabilité que le joueur joue au jeu $A$ lors de sa première partie, où $a$ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.

La suite $(a_n)$ est donc définie par : $a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

2. *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.
   a. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$.
   b. Montrer que la suite $(a_n)$ est croissante.
   c. Montrer que la suite $(a_n)$ est convergente et préciser sa limite.
3. *Étude du cas général.* Dans cette question, le réel $a$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.
   On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0,6$.
   a. Montrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique.
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$.
   c. Déterminer la limite de la suite $(a_n)$. Cette limite dépend-elle de la valeur de $a$ ?
   d. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type $A$ et une autre insérée en début des parties de type $B$.
   Quelle devrait-être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

## Exercice 17 : Dénombrement

Dans cette partie les urnes $U_1$ et $U_2$ sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne $U_1$ et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne $U_2$.

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante :
On pioche simultanément deux boules dans l'urne $U_1$ que l'on place dans l'urne $U_2$, puis on pioche au hasard une boule dans l'urne $U_2$.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne $U_1$ ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne $U_1$ contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?
3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne $U_2$ avec cette nouvelle expérience est- elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne $U_2$ avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse.

## Exercice 18 : Dénombrement

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.
À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.
Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.
Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est $(4 ; 5 ; 1)$.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. a. Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
   b. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note $X_1$ la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, $X_2$ celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et $X_3$ celle égale au numéro du troisième jeton pioché.

Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires $X_1, X_2$, et $X_3$ sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire $X_1$
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $X_1$

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $S$.
6. Déterminer $P(S = 24)$.
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
   a. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
   b. En déduire la probabilité de gagner un lot.

## Exercice 19 : Équations différentielles

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + \frac{1}{4}y = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue $y$, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel $a$ tel que la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = ax\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$.
2. On considère l'équation différentielle

$$(E') : \quad y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

   d'inconnue $y$, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
   Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E')$.
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle $(E)$.
4. Déterminer la solution $f$ de l'équation différentielle $(E)$ telle que $f(0) = 8$.

## Exercice 20 : Équations différentielles

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y' = y - \frac{1}{6}y^2.$$

On rappelle qu'une solution de l'équation $(E)$ est une fonction $u$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x$ réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}[u(x)]^2.$$

1. Montrer que la fonction $f$ définie dans la partie A est une solution de l'équation différentielle $(E)$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$.
3. On désigne par $g$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas.

   On note $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

   On admet que $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, On note $g'$ et $h'$ les fonctions dérivées de $g$ et $h$.

   **a.** Montrer que si $h$ est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$, alors $g$ est solution de l'équation différentielle $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

   **b.** Pour tout réel positif $m$, on considère les fonctions $g_m$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6m\mathrm{e}^{-x}}.$$

   Montrer que pour tout réel positif $m$, la fonction $g_m$ est solution de l'équation différentielle $(E)$ : $\quad y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

## Exercice 21 : Intégrale

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right)$,

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Étudier le signe de la fonction $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Interpréter graphiquement l'intégrale :

   $$I = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;\,4]$, on a l'encadrement :

   $$0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25.$$

   En déduire l'encadrement : $\quad 1 \leqslant I \leqslant 2.$

## Exercice 22 : Intégrale

Dans cette partie, on considère que la fonction $f$, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ est définie par

$$f(x) = (4x - 2)\mathrm{e}^{-x+1}.$$

On notera respectivement $f'$ et $f''$ la dérivée et la dérivée seconde de la fonction $f$.

1. Étude de la fonction $f$

   **a.** Montrer que $f'(x) = (-4x + 6)\mathrm{e}^{-x+1}$.

   **b.** Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

   **c.** Étudier la convexité de la fonction $f$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de $f$.

2. On considère une fonction $F$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x+1}$, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.

   **a.** Déterminer les valeurs des réels $a$ et $b$ telles que la fonction $F$ soit une primitive de la fonction $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

   **b.** On admet que $F(x) = (-4x - 2)\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

   En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à $10^{-2}$ près, de l'intégrale

   $$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

# RÉVISIONS - SPÉCIALITÉ MATHS - CORRECTION

## Exercice 1 : Suites

La suite $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout $n$, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{7}{4}$.
   Pour $n = 1$, $u_1 = u_{1+1} = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}$.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite $(u_n)$.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $n$ | $u_n$ |
| 2 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1,75 |
| 4 | 2 | 2,562 5 |
| 5 | 3 | 3,421 875 |
| 6 | 4 | 4,316 406 25 |

2. **a.** La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de $(u_n)$ dans la colonne B est :
   = 3/4 * B2 + 1/4 * A2 +1.

   **b.** La suite $(u_n)$ semble croissante.

3. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité**
     On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ (hypothèse de récurrence).
     $$\begin{aligned} n \leqslant u_n \leqslant n+1 &\iff \frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) \\ &\iff \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n \\ &\iff n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant n + \frac{3}{4} \\ &\iff n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant n + \frac{3}{4} + 1 \iff n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4} \end{aligned}$$
     donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.
     On a démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion**
     La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel $n$, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

   **b.** D'après la question précédente :
   - Pour tout $n$, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ donc
     $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ d'où on tire $u_n \leqslant u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite $(u_n)$ est croissante.
   - Pour tout $n$, $n \leqslant u_n$ ; or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

   **c.** Pour tout $n$, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n+1}{n}$ c'est-à-dire :
   $1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$.
   $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$
   Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4. On désigne par $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

   **a.** Pour tout $n$, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.
   $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}(v_n + n) - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n$
   $v_0 = u_0 - 0 = 1$
   Donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

   **b.** On en déduit que, pour tout $n$, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

   Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

## Exercice 2 : Suites

1. **a.** $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$ et $v_1 = 2 \times u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3$.

   **b.** Pour tout $n$, $v_{n+1} = 2u_n + v_n$ donc $v_{n+1} - v_n = 2u_n$.
   On a admis que la suite $(u_n)$ était strictement positive donc, pour tout $n$, $u_n > 0$ ; on en déduit que, pour tout $n$, $v_{n+1} - v_n > 0$ donc que la suite $(v_n)$ est strictement croissante.
   La suite $(v_n)$ est strictement croissante donc, pour tout $n$, $v_n \geqslant v_0$ donc $v_n \geqslant 1$.

   **c.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant n+1$.
   On démontre cette propriété par récurrence.
   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1$ et $n+1 = 1$ donc $u_n \geqslant n+1$ ; $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité**
     On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie (hypothèse de récurrence) et on va démontrer que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
     $\mathscr{P}_n$ vraie équivaut à $u_n \geqslant n+1$.
     $u_{n+1} = u_n + v_n$ ; or $u_n \geqslant n+1$ et, d'après la question 1.b, $v_n \geqslant 1$. On en déduit que $u_{n+1} \geqslant n+2$ et donc que la propriété est vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion**
     La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$ ; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant n+1$.

   **d.** Pour tout $n$, $u_n \geqslant n+1$ ; or $\lim\limits_{n \to +\infty} n+1 = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n$ : $r_n = \frac{v_n}{u_n}$. On admet que : $r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

   **a.** $(-1)^{n+1}$ vaut soit $-1$, soit 1 selon la parité de $n$ ; donc $-1 \leqslant (-1)^{n+1} \leqslant 1$.
   On sait que $u_n > 0$ donc $u_n^2 > 0$.
   On divise par $u_n^2$ et on obtient : $-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}$.

   **b.** On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^2 = +\infty$.
   On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{u_n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n^2} = 0$.
   On sait de plus que, pour tout $n$ : $-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}$.
   Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$.

   **c.** $r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n^2 = 2$.
   On peut en déduire que la suite $(r_n)$ converge vers $\sqrt{2}$

   **d.** Pour tout entier naturel $n$,
   $$r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n\left(2 + \frac{v_n}{u_n}\right)}{u_n\left(1 + \frac{v_n}{u_n}\right)} = \frac{2 + \frac{v_n}{u_n}}{1 + \frac{v_n}{u_n}} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

## Exercice 3 : Suites

**I – Premier modèle**

En 10 minutes la température a augmenté de $1,3-(-19) = 1,3+19 = 20,3$ soit une augmentation de $2,03$ °C.
Selon ce premier modèle l'augmentation de la température serait au bout de 25 minutes de $25 \times 2,03 = 50,75$ (°C).
Les gâteaux seraient donc à une température de $-19 + 50,75 = 31,75$(°C) alors que la température ambiante est de 25 °C : c'est impossible, donc ce modèle n'est pas pertinent.

**II – Second modèle**

1. On a $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25) \iff T_{n+1} - T_n = -0,06T_n + 1,5 \iff T_{n+1} = T_n - 0,06T_n + 1,5 \iff T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.

2. - Avec $n = 0$, la relation précédente donne $T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = 1,5 - 17,86 = -16,36$ ;
   - Avec $n = 1$, la relation précédente donne $T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5 = 1,5 - 15,3784 = -13,8784$.

3. *Initialisation* $T_0 = -19 \leqslant 25$. L'inégalité est vraie au rang 0.

   *Hérédité* Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leqslant 25$ alors en multipliant par 0,94 :

   $0,94T_n \leqslant 0,94 \times 25$, soit $0,94T_n \leqslant 23,5$.

   D'où en en ajourant à chaque membre 1,5 :

   $0,94T_n + 1,5 \leqslant 23,5 + 1,5$, soit finalement $T_{n+1} \leqslant 25$ : l'inégalité est vraie au rang $n$.

   Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n$, elle l'est aussi au rang $n+1$.

   D'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leqslant 25$.

   Ceci correspond à une évidence : la température des gâteaux ne peut dépasser la température ambiante.

4. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$.

   D'après la question précédente $T_n \leqslant 25$ soit en multipliant par 0,06 :

   $0,06T_n \leqslant 0,06 \times 25$, ou $0,06T_n \leqslant 1,5$

   et en prenant les opposés : $-1,5 \leqslant -0,06T_n$ et enfin en ajoutant à chaque membre 1,5 :

   $0 \leqslant -0,6T_n + 1,5$.

   On a donc démontré que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n \geqslant 0$ : la suite $(T_n)$ est donc croissante.

5. On a donc démontré que la suite $(T_n)$ est croissante et majorée par 25 : elle converge donc vers une limite $\ell$ telle que $\ell \leqslant 25$.

6. On pose pour tout entier naturel $n$, $U_n = T_n - 25$.

   **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94T_n + 1,5 - 25$ ou encore $U_{n+1} = 0,94T_n - 23,5 = 0,94\left(T_n - \frac{23,5}{0,94}\right) = 0,94(T_n - 25)$, soit finalement $T_{n+1} = 0,94U_n$ :cette égalité montre que la suite $(U_n)$ est une suite géométrique de raison 0,94 et de premier terme $U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$.

   **b.** On sait que quel soit $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times 0,94^n$ ou
   $U_n = -44 \times 0,94^n$.
   Or $U_n = T_n - 25 \iff T_n = U_n + 25$ ou encore $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$, soit finalement :
   $$T_n = 25 - 44 \times 0,94^n, \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}$$

   **c.** Comme $0 < 0,94 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,94^n = 0$, d'où par somme de limites :
   $$\lim_{n \to +\infty} T_n = \ell = 25.$$

7. **a.** On a $T_{25} = 25 - 44 \times 0,97^{25} \approx 15,632$ soit environ 16°C.

   **b.** La calculatrice donne $T_{17} \approx 9,63$ et $T_{18} \approx 10,55$, donc Cécile devra déguster son gâteau entre la 17e et la 18e minute après sa sortie.

# Exercice 4 : Géométrie

**1.** Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

**a.** (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) $\boxed{\textbf{c.}\ \text{(AC) et (SB)}}$ **d.** (LM) et (AD)

> On procède par élimination.
> - Les droites (DK) et (SD) sont sécantes en D donc coplanaires ; on élimine **a.**
> - Les droites (AS) et (IC) sont sécantes en A donc coplanaires ; on élimine **b.**
> - Les droites (LM) et (AD) sont toutes deux parallèles à (BC) donc parallèles entre elles ; elles sont donc coplanaires ; on élimine **d.**
>
> **Réponse c.**

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{IC}},\,\overrightarrow{\mathrm{IB}},\,\overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\mathrm{I}(0\,;\,0\,;\,0)\,;\,\mathrm{A}(-1\,;\,0\,;\,0)\,;\,\mathrm{B}(0\,;\,1\,;\,0)\,;\,\mathrm{C}(1\,;\,0\,;\,0)\,;\,\mathrm{D}(0\,;\,-1\,;\,0)\,;\,\mathrm{S}(0\,;\,0\,;\,1).$$

**2.** Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

**a.** $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ $\boxed{\textbf{b.}\ \left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)}$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$

> - Le milieu K de [SD] a pour coordonnées $\left(0\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
> - Le milieu L de [SC] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
> - Le milieu N de [KL] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
>
> **Réponse b.**

**3.** Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ sont :

**a.** $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\boxed{\textbf{b.}\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

> **Réponse b.**

**4.** Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

**a.** $\left\{\begin{array}{lcr}x&=&-1-t\\y&=&t\\z&=&-t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{lcr}x&=&-1+2t\\y&=&0\\z&=&1+2t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ $\boxed{\textbf{c.}\ \left\{\begin{array}{lcr}x&=&t\\y&=&0\\z&=&1+t\end{array}\right.\ (t\in\mathbb{R})}$ **d.** $\left\{\begin{array}{lcr}x&=&-1-t\\y&=&1+t\\z&=&1-t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$

> La droite (AS) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}\,(1\,;\,0\,;\,1)$ ; la seule représentation qui convienne est la c.
>
> **Réponse c.**

**5.** Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

**a.** $y+z-1=0$ $\boxed{\textbf{b.}\ x+y+z-1=0}$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

> On procède par élimination.
> - Le plan d'équation $y+z-1=0$ ne contient pas C $(1\,;\,0\,;\,0)$ ; on élimine **a.**
> - Le plan d'équation $x-y+z=0$ ne contient pas S $(0\,;\,0\,;\,1)$ ; on élimine **c.**
> - Le plan d'équation $x+z-1=0$ ne contient pas B $(0\,;\,1\,;\,0)$ ; on élimine **d.**
>
> **Réponse b.**

# Exercice 5 : Géométrie

**1. a.** Pour montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC), il suffit de démontrer que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC), par exemple $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $(-2\,;\,3\,;\,0)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{n}=-2\times3+3\times2+0\times6=0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{n}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ a pour coordonnées $(-2\,;\,0\,;\,1)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{n}=-2\times3+0\times2+1\times6=0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{n}$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC).

**b.** Le plan (ABC) est l'ensemble des points M $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\overrightarrow{n}$, c'est-à -dire $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{n}=0$. Or $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ a pour coordonnées $(x-2\,;\,y\,;\,z)$.

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{n}=0\iff(x-2)\times3+y\times2+z\times6=0\iff3x+2y+6z-6=0$

Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne $3x+2y+6z-6=0$.

**2.** On note $d$ la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

**a.** La droite $d$ est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à (ABC).

De plus elle passe par le point O de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,0)$.

La droite $d$ a donc pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&3k\\y&=&2k,\quad k\in\mathbb{R}\\z&=&6k\end{array}\right.$

**b.** La droite $d$ coupe le plan (ABC) au point H.

Les coordonnées du point H vérifient le système $\left\{\begin{array}{rcl}x_{\mathrm{H}}&=&3k\\y_{\mathrm{H}}&=&2k\\z_{\mathrm{H}}&=&6k\\3x_{\mathrm{H}}+2y_{\mathrm{H}}+6z_{\mathrm{H}}-6&=&0\end{array}\right.$

Donc $3\times3k+2\times2k+6\times6k-6=0$ ce qui équivaut à $9k+4k+36k=6$ ou $49k=6$ donc $k=\frac{6}{49}$.

$x=3k$ donc $x=\frac{18}{49}$, $y=2k$ donc $y=\frac{12}{49}$, et $z=6k$ donc $z=\frac{36}{49}$.

Le point H a donc pour coordonnées $\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{12}{49}\,;\,\frac{36}{49}\right)$.

**c.** $\mathrm{OH}^2=(x_{\mathrm{H}}-x_{\mathrm{O}})^2+(y_{\mathrm{H}}-y_{\mathrm{O}})^2+(z_{\mathrm{H}}-z_{\mathrm{O}})^2=\left(\frac{18}{49}\right)^2+\left(\frac{12}{49}\right)^2+\left(\frac{36}{49}\right)^2=\frac{18^2+12^2+36^2}{49^2}=\frac{1764}{49^2}$

Donc $\mathrm{OH}=\sqrt{\dfrac{1764}{49^2}}=\dfrac{42}{49}=\dfrac{7\times6}{7\times7}=\dfrac{6}{7}$.

**3.** On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V=\frac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et $h$ est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

- En prenant le triangle OAB pour base de la pyramide OABC, la hauteur est OC, et le volume $\mathscr{V}$ est égal à $\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times\mathrm{OC}$ où $\mathscr{B}$ est l'aire du triangle OAB.

  $\mathscr{B}=\frac{1}{2}\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}=\frac{1}{2}\times2\times3=3$ et $\mathrm{OC}=1$.

  Donc $\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times3\times1=1$ (u. a.).
- En prenant le triangle ABC pour base de la pyramide OABC, la hauteur est OH, et le volume $\mathscr{V}$ est égal à $\frac{1}{3}\times\mathscr{B}'\times\mathrm{OH}$ où $\mathscr{B}'$ est l'aire du triangle ABC.

  $\mathrm{OH}=\frac{6}{7}$ et $\mathscr{V}=1$ donc $1=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}'\times\frac{6}{7}$ et donc $\mathscr{B}'=\frac{49}{14}=\frac{7\times7}{7\times2}=\frac{7}{2}=3{,}5$.

L'aire du triangle ABC vaut $\frac{7}{2}=3{,}5$ (u. a.).

# Exercice 6 : Géométrie

**1.** Dans le repère $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, on a
B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1), H(0 ; 1 ; 1).

**2. a.** [EG], [GD] et [ED] sont les hypoténuses de triangles rectangles isocèles de côté 1, donc $\mathrm{EG}=\mathrm{GD}=\mathrm{ED}=\sqrt{2}$ : le triangle EGD est équilatéral.

**b.** Puisque $c=\sqrt{2}$, on a $\mathscr{A}(\mathrm{EGD})=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{2}\right)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**3.** On a $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BH}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{\mathrm{M}}-1\\y_{\mathrm{M}}-0\\z_{\mathrm{M}}-0\end{pmatrix}$.

On a donc : $x_{\mathrm{M}}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ ; $y_{\mathrm{M}}=\frac{1}{3}$ ; $z_{\mathrm{M}}=\frac{1}{3}$.

Conclusion : M a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

**4. a.** On a $\overrightarrow{\mathrm{EG}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ : donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}}=-1+1+0=0$ :

$\overrightarrow{\mathrm{ED}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ : donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}=0+1-1=0$.

Conclusion : $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD) : c'est un vecteur normal à ce plan.

**b.** On sait qu'un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ a un vecteur normal de coordonnées $(a\,;\,b\,;\,c)$, donc :

$P(x\,;\,y\,;\,z)\in(\mathrm{EGD})\iff-x+y+z+d=0$.

Comme $\mathrm{E}(0;\,0;\,1)\in(\mathrm{EGD})\iff0+0+1+d=0\iff d=-1$.

Finalement : le plan (EGD) a pour équation $-x+y+z-1=0$.

**c.** La droite $\mathscr{D}$ contient M et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ vecteur normal au plan (EGD), donc avec $\overrightarrow{\mathrm{M}P}\begin{pmatrix}x-\frac{2}{3}\\y-\frac{2}{3}\\z-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ : $P(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{D}\iff\overrightarrow{\mathrm{M}P}=t\,\overrightarrow{n}$, avec $t\in\mathbb{R}$, soit :

$\left\{\begin{array}{lcl}x-\frac{2}{3}&=&-t\\y-\frac{1}{3}&=&t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}\iff\left\{\begin{array}{lcl}x&=&\frac{2}{3}-t\\y&=&\frac{1}{3}+t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$

**5. a.** On a vu que la droite $\mathscr{D}$ contient M et est perpendiculaire au plan (EBD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue de M. Le pied de cette hauteur K appartient donc à $\mathscr{D}$ et au plan (EGD) ; ses coordonnées vérifient donc les équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x&=&\frac{2}{3}-t\\y&=&\frac{1}{3}+t\\z&=&\frac{1}{3}+t\\-x+y+z-1&=&0\end{array}\right.\Rightarrow-\left(\tfrac{2}{3}-t\right)+\tfrac{1}{3}+t+\tfrac{1}{3}+t-1=0\iff3t=1\iff t=\tfrac{1}{3}.$$

En remplaçant $t$ par $\frac{1}{3}$ dans l'équation paramétrique de $\mathscr{D}$, on obtient :

$\left\{\begin{array}{lcl}x&=&\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\\y&=&\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\\z&=&\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{array}\right.$ Conclusion : K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

**b.** On en déduit $\overrightarrow{\mathrm{KM}}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. D'où $\mathrm{KM}^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}$ ; on en déduit $\mathrm{KM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Comme $\mathscr{A}(\mathrm{EGD})=\frac{\sqrt{3}}{2}$, le volume de la pyramide GEDM est : $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{3}=\dfrac{1}{6}$.

## Exercice 7 : Fonctions

**Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[1 ; 4]$ par : $f(x) = -30x + 50 + 35\ln x$.

1. **a.** Sur l'intervalle $[1 ; 4]$, $f'(x) = -30 + \dfrac{35}{x} = \dfrac{-30x+35}{x} = \dfrac{35-30x}{x}$.

   **b.** Puisque $1 \leqslant x \leqslant 4$, $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $35 - 30x = 5(7-6x)$ donc du facteur $7-6x$.

   $7-6x > 0 \iff 7 > 6x \iff \dfrac{7}{6} > x \iff x < \dfrac{7}{6}$;

   $7-6x < 0 \iff 7 < 6x \iff \dfrac{7}{6} <> x \iff x > \dfrac{7}{6}$;

   $7-6x = 0 \iff 7 = 6x \iff \dfrac{7}{6} = x \iff x = \dfrac{7}{6}$.

   **c.** La fonction $f$ est donc croissante sur $\left[1 ; \dfrac{7}{6}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{7}{6} ; 4\right]$ et a donc un maximum : $f\left(\dfrac{7}{6}\right) = -30 \times \dfrac{7}{6} + 50 + 35\ln\dfrac{7}{6} = -35 + 50 + 35\ln\dfrac{7}{6} = 15 + 35\ln\dfrac{7}{6} \approx 20,4$.

2. $f$ décroit sur $\left[\dfrac{7}{6} ; 4\right]$ de $f\left(\dfrac{7}{6}\right) = 15 + 35\ln\dfrac{7}{6} \approx 20,4$ à $f(4) = -120 + 50 + 35\ln 4 = 35\ln 4 - 70 \approx -21,5$.

| $x$ | 1 | | $\frac{7}{6}$ | | $\alpha$ | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 20 | $\nearrow$ | $\approx 20,4$ | $\searrow$ | 0 | $\searrow$ | $\approx -21,4$ |

Sur l'intervalle $\left[\dfrac{7}{6} ; 4\right]$, $f$ est continue et strictement décroissante.

Comme $0 \in \left[f\left(\frac{7}{6}\right) ; f(4)\right]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un réel unique $\alpha$ de cet intervalle tel que $f(\alpha) = 0$.

- On a $f(2,914) \approx 0,0013$ et $f(2,915) \approx -0,005$, donc $2,914 < \alpha < 2,915$.

3. On a donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[1 ; \alpha]$ et $f(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha ; 4]$.

**Partie 2 : Optimisation**

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1. 2 500 litres correspondent à $x = 2,5$ et $B(2,5) = -15 \times 2,5^2 + 15 \times 2,5 + 35 \times 2,5 \times \ln 2,5 \approx 23,9254$ soit environ 23 925 €.

2. La fonction $B$ est dérivable sur $[1 ; 4]$ et sur cet intervalle :
   $B'(x) = -30x + 15 + 35\ln x + 35x \times \dfrac{1}{x} = 50 - 30x + 35\ln x = f(x)$.

3. **a.** D'après la partie 1, $f(x) = B'(x) \geqslant 0$ sur $[1 ; \alpha]$ : la fonction $B$ est donc croissante sur $[1 ; \alpha]$.

   De même $f(x) = B'(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha ; 4]$ : la fonction $B$ est donc décroissante sur $[1 ; \alpha]$.

   Conclusion : $B(\alpha)$ est le maximum de la fonction $B$ sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

   **b.** $B(\alpha) = -15\alpha^2 + 15\alpha + 35\alpha\ln\alpha$.

   En utilisant la valeur approchée de $\alpha$ trouvée dans la partie 1, on a :

   $B(\alpha) \approx -15 \times 2,914^2 + 15 \times 2,914 + 35 \times 2,914 \times \ln 2,914 \approx 25,4201$, soit environ 25 420 € à l'euro près.

   Il faut donc que l'entreprise vende 2 914 litres de jus de fruits pour faire un bénéfice maximal.

## Exercice 8 : Fonctions

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé.

1. **a.** D'après le cours, la limite de la fonction $f$ en $+\infty$ est $+\infty$.

   **b.** On cherche la limite de $f$ en 0 :

   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

   Donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.

3. Pour déterminer les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on cherche le signe de $f'(x)$.

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $e^x$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x^2$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | |

$f(1) = \dfrac{e^1}{1} = e$

On établit le tableau de variations de la fonction $f$ :

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | e | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4. Soit $m$ un nombre réel. On cherche, en fonction des valeurs du nombre réel $m$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

   Cela revient à chercher le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite horizontale d'équation $y = m$.

   D'après le tableau de variations :
   - si $m < e$, l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution;
   - si $m = e$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique $x = 1$;
   - si $m > e$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

5. On note $\Delta$ la droite d'équation $y = -x$.

   On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a$ en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite $\Delta$.

   **a.** La tangente en $a$ est parallèle à la droite $\Delta$ si et seulement si le coefficient directeur de la tangente est égal à $-1$, autrement dit quand $f'(a) = -1$.

   $f'(a) = -1 \iff \dfrac{e^a(a-1)}{a^2} = -1 \iff e^a(x-1) = -a^2 \iff e^a(x-1) + a^2 = 0$

   ce qui veut dire que le nombre $a$ est solution de l'équation $e^x(x-1) + x^2 = 0$.

   On note $g$ la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^x(x-1) + x^2$.

   On admet que la fonction $g$ est dérivable et on note $g'$ sa fonction dérivée.

   **b.** $g'(x) = e^x \times (x-1) + e^x \times 1 + 2x = xe^x + 2x$

   Sur $\mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc sur $[0 ; +\infty[$, $xe^x + 2x \geqslant 0$ donc $g'(x) \geqslant 0$.

   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

   $g(0) = e^0(0-1) + 0 = -1$

   On dresse le tableau de variations de la fonction $g$ sur $[0 ; +\infty[$ :

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | 0 | $+$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

   **c.** D'après ce tableau, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $a$ sur $[0 ; +\infty[$, donc il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite $\Delta$.

# Exercice 9 : Fonctions

**Partie A**

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$, par $g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+e^x)^2}$.
On admet que la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note $g'$ sa fonction dérivée.

**1.** On détermine les limites de $g$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (1+e^x)^2 = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{(1+e^x)^2} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+e^x)^2} = +\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

- Limite en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} (1+e^x)^2 = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{(1+e^x)^2} = 4$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+e^x)^2} = +\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

**2.** On admet que la fonction $g'$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et que $g'(0) = 0$.

- Pour $x < 0$, comme la fonction $g'$ est strictement croissante, on a $g'(x) < g'(0)$ ; on sait que $g'(0) = 0$ donc, pour tout $x < 0$, on a $g'(x) < 0$.
- Pour $x > 0$, comme la fonction $g'$ est strictement croissante, on a $g'(x) > g'(0)$ ; on sait que $g'(0) = 0$ donc, pour tout $x > 0$, on a $g'(x) > 0$.

**3.** La fonction $g'$ s'annule et change de signe pour $x = 0$ ; elle passe de négative à positive, donc la fonction $g$ admet un minimum en $x = 0$ qui vaut $g(0) = \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+1)^2} = \frac{5}{4}$.

On dresse le tableau des variations de la fonction $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{5}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Partie B**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = 3 - \frac{2}{1+e^x}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, représentée dans la **figure** ci-dessous.

Soit A le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\ 3\right)$.

**1.** $f(0) = 3 - \frac{2}{1+e^0} = 3 - \frac{2}{2} = 2$ donc le point B(0 ; 2) appartient à $\mathscr{C}_f$.

**2.** Soit $x$ un réel quelconque.
On note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x\,;\ f(x))$.

$$\text{AM}^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(f(x) - 3\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{2}{1+e^x} - 3\right)^2$$
$$= x^2 + x + \frac{1}{4} + \left(-\frac{2}{1+e^x}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+e^x)^2} = g(x)$$

**3.** On admet que la distance AM est minimale si et seulement si $\text{AM}^2$ est minimal.
$\text{AM}^2 = g(x)$ et $g(x)$ est minimale pour $x = 0$ ; AM est minimale pour $x = 0$ donc si M a pour abscisse 0, c'est-à-dire est en B.

**4.** On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

**a.** Pour tout réel $x$, $f'(x) = 0 - \frac{0 - 2e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$

**b.** Soit $T$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.
L'équation réduite de $T$ est : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

- $f'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$ donc $f'(0) = \frac{2\times 1}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$
- $f(0) = y_B = 2$

Donc l'équation réduite de $T$ est $y = \frac{x}{2} + 2$.

**5.** La droite $T$ a pour équation $y = \frac{x}{2} + 2$ soit $\frac{x}{2} - y + 2 = 0$ ; elle a donc pour vecteur normal $\vec{n}\left(\frac{1}{2}\,;\ -1\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $\left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\,;\ 2 - 3\right)$ soit $\left(\frac{1}{2}\,;\ -1\right)$ ; il est donc normal à la droite $T$.
On en déduit que la droite $T$ est perpendiculaire à la droite (AB).

# Exercice 10 : Fonctions

**1.** On détermine la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

$f(x) = x\left(1 - 4\frac{\ln(x)}{x}\right) + 4 - \frac{3}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - 4\frac{\ln(x)}{x}\right) + 4 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

**2.** On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $]0\,;\ +\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

$f'(x) = 1 + 0 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

**3. a.** On cherche le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\ +\infty[$ :
$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 4x + 3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $x^2$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$f(1) = 1 + 4 - 4\ln(1) - \frac{3}{1} = 2$ ; $f(3) = 3 + 4 - 4\ln(3) - \frac{3}{3} = 6 - 4\ln(3) \approx 1{,}69$

On établit le tableau des variations de $f$ en admettant que que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\|\|$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $6 - 4\ln(3) \approx 1{,}61$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**b.**
- $\frac{5}{3} \in ]-\infty\,;\ 2]$ donc l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\ 1]$.
- $\frac{5}{3} \approx 1{,}67$ et $f(3) = 6 - 4\ln 3 \approx 1{,}61$ donc $\frac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3\,;\ 2]$, donc l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\,;\ 3[$.
- $\frac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3\,;\ +\infty[$, donc $f(x) = \frac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\ 1]$.

Conclusion : l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$ admet donc trois solutions dans $]0\,;\ +\infty[$.

**4.** Pour étudier la convexité de $f$, on détermine le signe de $f''$, la dérivée seconde de $f$.

$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$ donc

$f''(x) = \frac{(2x-4)\times x^2 - (x^2 - 4x + 3)\times 2x}{x^4} = \frac{(2x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 6)\times x}{x^4} = \frac{4x - 6}{x^3}$

| $x$ | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4x - 6$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^3$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f''(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | $\|\|$ | $f$ concave | | $f$ convexe | |

La dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = \frac{3}{2}$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\frac{3}{2}$.

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + 4 - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{11}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{7}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

La courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{3}{2}\,;\ \frac{7}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$.

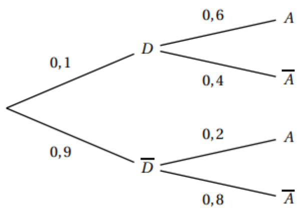
## Exercice 11 : Probabilités

**Partie I**

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- $D$ l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- $A$ l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènement $D$ et $A$ respectivement.

**1.** On traduit la situation par un arbre pondéré :




**2.** La probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école est : $P(D \cap A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$.

**3.** La probabilité de l'évènement $A$ est $P(A)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A) = 0,06 + 0,9 \times 0,2 = 0,24$.

**4.** On choisit au hasard un candidat admis à l'école. La probabilité que son dossier n'ait p été sélectionné est :
$P_A(\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,18}{0,24} = 0,75$.

**Partie II**

**1.** On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.
On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par $X$ la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

**a.** On admet que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale.
La probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $p = 0,24$, et on choisit un échantillon de 7 candidats donc $n = 7$.
La variable aléatoire $X$ suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(7; 0,24)$.

**b.** La probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école est :
$P(X = 1) = \dbinom{7}{1} \times 0,24^1 \times (1 - 0,24)^{7-1} \approx 0,32$.

**c.** La probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école est : $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - 0,47 = 0,53$.

**2.** Un lycée présente $n$ candidats au recrutement dans cette école, où $n$ est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

**a.** La variable aléatoire $Y$ qui donne le nombre d'admis parmi les $n$ candidats présentés suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n; 0,24)$.
La probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école est :
$P(Y = 0) = \dbinom{n}{0} \times 0,24^0 \times 0,76^n = 0,76^n$.

**b.** On cherche à partir de quelle valeur de l'entier $n$ la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à 0,99.
On veut donc que $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$ c'est-à-dire $1 - P(Y = 0) \geqslant 0,99$ ou encore $P(Y = 0) \leqslant 0,01$. On résout l'inéquation d'inconnue $n$ : $0,76^n \leqslant 0,01$ :
$0,76^n \leqslant 0,01 \iff \ln(0,76^n) \leqslant \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,76) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)}$
Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)} \approx 16,8$ donc c'est à partir de 17 élèves que la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à 0,99.

## Exercice 12 : Probabilités

**1.** La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

**a.** 0 **b.** 1 **c.** 0,24 $\boxed{\textbf{d. } 0,76}$

On cherche $P(X = 0)$ qui vaut $\dbinom{9}{0} \times 0,03^0 \times 0,97^9 \approx 0,76$.
**Réponse d.**

**2.** La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

**a.** $\dbinom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ **b.** $\dbinom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$

$\boxed{\textbf{c. } \dbinom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2}$ **d.** $\dbinom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

On cherche $P(X = 2)$ qui vaut $\dbinom{9}{2} \times 0,03^2 \times 0,97^7$.
**Réponse c.**

**3.** La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

**a.** $P(X < 1)$ **b.** $P(X \leqslant 1)$ **c.** $P(X \geqslant 2)$ $\boxed{\textbf{d. } 1 - P(X = 0)}$

On cherche $P(X \geqslant 1)$ qui vaut $1 - P(X = 0)$.
**Réponse d.**

**4.** La probabilité de $V_2$ sachant que $V_1$ est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :

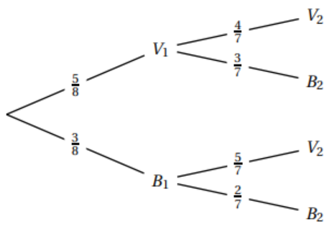
**a.** $\dfrac{5}{8}$ $\boxed{\textbf{b. } \dfrac{4}{7}}$ **c.** $\dfrac{5}{14}$ **d.** $\dfrac{20}{56}$

D'après l'arbre, $P_{V_1}(V_2) = \dfrac{4}{7}$.
**Réponse b.**

**5.** La probabilité de l'évènement $V_2$ est égale à :

$\boxed{\textbf{a. } \dfrac{5}{8}}$ **b.** $\dfrac{5}{7}$ **c.** $\dfrac{3}{28}$ **d.** $\dfrac{9}{7}$

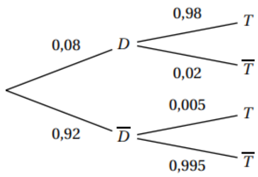
D'après la formule des probabilités totales :
$P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(B_1 \cap V_2) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{20}{56} + \dfrac{15}{56} = \dfrac{35}{56} = \dfrac{5}{8}$
**Réponse a.**




## Exercice 13 : Probabilités

**Partie A**

**1.**




**2.** D'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(D \cap T) + P\left(\overline{D} \cap T\right)$ : or
$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,08 \times 0,98 = 0,0784$ et
$P\left(\overline{D} \cap T\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,92 \times 0,005 = 0,00460$. Donc :
$P(T) = 0,0784 + 0,0046 = 0,083$.

**3.** **a.** La probabilité conditionnelle $P_T(D) = \dfrac{P(T \cap D)}{P(T)} = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,0784}{0,083} \approx 0,9445$, soit 0,945 au millième près.

**b.** D'après la question précédente $0,945 < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

**Partie B**

**1.** **a.** Quel que soit l'athlète choisi la probabilité que cet athlète présente un test positif est 0,103. La variable aléatoire $X$ suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,103$.

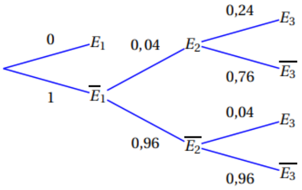
**b.** On sait que $E = n \times p = 5 \times 0,103 = 0,515$ : ceci montre que sur un grand nombre de contrôles, il y aura à peu près 1 athlète sur 10 contrôlé positif.

**c.** La probabilité qu'aucun athlète ne soit contrôlé positif est :
$0,103^0 \times (1 - 0,103)^5 = 0,897^5 \approx 0,5807$ soit environ 0,581 au millième près.
Donc la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif est :
$1 - 0,581$, soit 0,419 au millième près.

**2.** On a pour $n$ athlètes contrôlés, $P(X = 0) = 0,103^0 \times 0,897^n = 0,897^n$.
Il faut donc trouver $n$ tel que :
$1 - 0,897^n \geqslant 0,75 \iff 1 - 0,75 \geqslant 0,897^n \iff 0,25 \geqslant 0,897^n$.
La calculatrice donne le plus petit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant cette inéquation : pour $n = 13$, on a $0,897^{13} \approx 0,243$.
Il faut donc contrôler 13 athlètes en moyenne pour en trouver un positif.

# Exercice 14 : Suites - Probabilités

1. (a) Déterminer la valeur de $p_3$ à l'aide d'un arbre de probabilité.

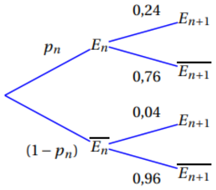



Théorème des probabilités totales : $E_3 = E_2 \cap E_3 \cup \overline{E_2} \cap E_3$ (union d'évènements disjoints)
$p_3 = P(E_3) = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,048$.

(b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

$$P_{E_3}(E_2) = \frac{P(E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

2. (a) Complétons l'arbre




(b) En appliquant le théorème des probabilités totales :

$E_{n+1} = E_n \cap E_{n+1} \cup \overline{E_n} \cap E_{n+1}$ (union d'évènements disjoints)
$p_{n+1} = 0,24p_n + 0,04(1-p_n) = (0,24-0,04)p_n + 0,04 = 0,2p_n + 0,04$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n$$

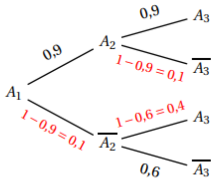
donc $(u_n)$ est la suite géométrique de premier terme $u_1 = -0,05$ et la raison $r = 0,2$.

Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}$
et donc : $p_n = u_n + 0,05 = 0,05(1 - 0,2^{n-1})$ .

(d) Limite de la suite $(p_n)$.
Comme $|0,2| < 1$ alors par théorème : $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,2)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,05$.

# Exercice 15 : Suites - Probabilités

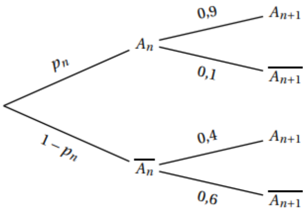
**1. a.** On complète l'arbre de probabilités relatif aux trois premières semaines.




**b.** D'après la formule des probabilités totales :
$P(A_3) = P(A_2 \cap A_3) + P\left(\overline{A_2} \cap A_3\right)$
$= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P\left(\overline{A_2}\right) \times P_{\overline{A_2}}(A_3)$
$= 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,81 + 0,04 = 0,85$

**c.** Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 est :
$P_{A_3}(A_2) = \dfrac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \dfrac{0,9 \times 0,9}{0,85} \approx 0,95$.

**2.** On représente un arbre pondéré correspondant aux semaines $n$ et $n+1$ :




D'après la formule des probabilités totales :
$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) = p_n \times 0,9 + (1-p_n) \times 0,4$
$= 0,5p_n + 0,4$.

**3. a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $p_n > 0,8$.

- **Initialisation**
On sait que $p_1 = 1$ donc $p_1 > 0,8$; la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité**
Soit un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que la propriété soit vraie au rang $k$, c'est-à-dire $p_k > 0,8$. C'est l'hypothèse de récurrence.
On va démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $p_k > 0,8$ donc $0,5p_k > 0,4$ et donc $0,5p_k + 0,4 > 0,8$ qui signifie $p_{k+1} > 0,8$. La propriété est donc vraie au rang $k+1$.
- **Conclusion**
La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire pour tout $k \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel non nul, $p_n > 0,8$.

**b.** Pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n = 0,5p_n + 0,4 - p_n = 0,4 - 0,5p_n$.
Or $p_n > 0,8$ donc $0,5p_n > 0,4$ donc $-0,5p_n < -0,4$ et donc $0,4 - 0,5p_n < 0$.
On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n < 0$ et donc que la suite $(p_n)$ est strictement décroissante.

**c.** Pour tout $n \geqslant 1$, $p_n > 0,8$ donc la suite $(p_n)$ est minorée par 0,8.
On a vu aussi que la suite $(p_n)$ était décroissante.
D'après le théorème de la convergence monotone, on peut déduire que la suite $(p_n)$ est convergente.

**4.** On pose pour tout entier $n \geqslant 1$ : $v_n = p_n - 0,8$ donc $p_n = v_n + 0,8$.

**a.**
- $v_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = 0,5p_n + 0,4 - 0,8 = 0,5(v_n + 0,8) - 0,4 = 0,5v_n + 0,4 - 0,4 = 0,5v_n$
- $v_1 = p_1 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$

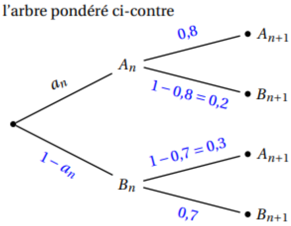
Donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = 0,2$.

**b.** On déduit de la question précédente que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
Comme pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = v_n + 0,8$, on en déduit que $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

**c.** La suite $(v_n)$ est géométrique de raison 0,5 et $-1 < 0,5 < 1$ donc la suite $(v_n)$ est convergente

# Exercice 16 : Suites - Probabilités

**1. a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre




**b.** D'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_n \cap A_{n+1}) + P_{B_n}(B_n \cap A_{n+1}) = 0,8a_n + 0,3(1-a_n) = 0,5a_n + 0,3$ donc

$$\boxed{a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3}$$

**2. a.** Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$ :

- Initialisation : $a_1 = a = 0,5$ donc $0 \leqslant a_1 \leqslant 0,6$
- Hérédité : on suppose $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$ pour une valeur quelconque de $n \geqslant 1$.
Alors : $0 \leqslant 0,5 \times a_n \leqslant 0,5 \times 0,6$ donc $0 \leqslant 0,5a_n \leqslant 0,3$ d'où, en ajoutant 0,3 :
$0,3 \leqslant 0,3 + 0,5a_n \leqslant 0,6$ et par conséquent : $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 0,6$.
La propriété est vraie au rang $n+1$.

La propriété est vraie au rang 1 et, si elle est vraie à un rang $n$ quelconque elle est vraie au rang suivant $n+1$ : d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

**b.** Pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} - a_n = 0,5a_n + 0,3 - a_n = -0,5a_n + 0,3$.
Or, d'après la question précédente, on a :
$0 \leqslant a_n \leqslant 0,6 \Rightarrow 0 \leqslant 0,5a_n \leqslant 0,3 \Rightarrow -0,3 \leqslant -0,5a_n \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant -0,5a_n + 0,3 \leqslant 0,3$ donc $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$.
La suite est donc croissante.

**c.** La suite est croissante et majorée par 0,6, donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite est convergente vers une limite $\ell \leqslant 0,6$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,5a_n + 0,3) = 0,5\ell + 0,3$.
Par unicité de la limite, on a : $0,5\ell + 0,3 = \ell$ donc $0,3 = 0,5\ell$ qui donne $\boxed{\ell = 0,6}$.
La suite $(a_n)$ converge vers 0,6.

**3.** *Étude du cas général.* Dans cette question, le réel $a$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.
On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0,6$.

**a.** Pour tout $n$, $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,5a_n + 0,3 - 0,6 = 0,5a_n - 0,3 = 0,5(a_n - 0,6) = 0,5u_n$ donc $\boxed{u_{n+1} = 0,5u_n}$.
La suite $(u_n)$ est donc géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$.

**b.** Puisque $(u_n)$ est géométrique, $u_n = u_1 q^{n-1} = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.
Comme $u_n = a_n - 0,6$, on a : $a_n = u_n + 0,6 = \boxed{a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6}$.

**c.** $-1 < 0,5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^{n-1} = 0$ d'où, par produit et par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0,6}$.
Cette limite ne dépend pas de la valeur de $a$.

**d.** Sur le long terme, la probabilité que le joueur fasse une partie de type $A$ est 0,6 et donc celle qu'il fasse une partie de type $B$ est 0,4. Le joueur verra plus souvent la publicité insérée dans les jeux de type $A$.

## Exercice 17 : Dénombrement

**1.** Dans l'urne $U_1$ il y a 10 boules et on en prend 2 simultanément ; il y a donc $\binom{10}{2} = 45$ tirages possibles.

**2.** Il y a 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne $U_1$ ; le nombre de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne $U_1$ contenant exactement une boule blanche et une boule noire est donc $\binom{4}{1} \times \binom{6}{1} = 4 \times 6 = 24$.

**3.** On examine les différents cas.

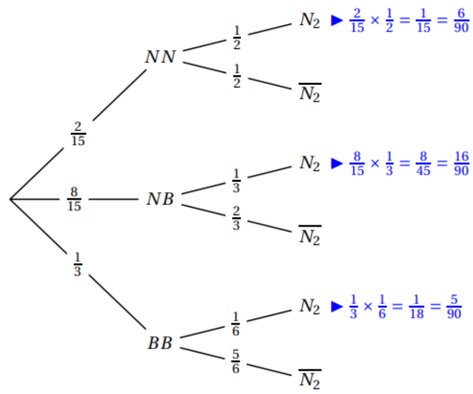
- On a pioché 2 boules noires dans $U_1$ (événement noté $NN$).
  - ▷ $P(NN) = \dfrac{\binom{4}{2}}{45} = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$
  - ▷ On a mis les 2 boules noires piochées dans $U_1$ dans l'urne $U_2$ ; l'urne $U_2$ contient alors 3 boules noires et 3 boules blanches.

    La probabilité de piocher une boule noire dans $U_2$ est alors $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.
- On a pioché 1 boule noire et 1 boule blanche dans $U_1$ (événement noté $NB$).
  - ▷ $P(NB) = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$
  - ▷ On a mis les 2 boules, une noire une blanche, piochées dans $U_1$ dans l'urne $U_2$ ; l'urne $U_2$ contient alors 2 boules noires et 4 boules blanches.

    La probabilité de piocher une boule noire dans $U_2$ est alors $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.
- On a pioché 2 boules blanches dans $U_1$ (événement noté $BB$).
  - ▷ $P(BB) = \dfrac{\binom{6}{2}}{45} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$
  - ▷ On a mis les 2 boules blanches piochées dans $U_1$ dans l'urne $U_2$ ; l'urne $U_2$ contient alors 1 boule noire et 5 boules blanches.

    La probabilité de piocher une boule noire dans $U_2$ est alors $\dfrac{1}{6}$.

On résume la situation dans un arbre pondéré.




La probabilité de piocher une boule noire dans $U_2$ est, d'après la formule des probabilités totales :

$P(N_2) = P(NN \cap N_2) + P(NB \cap N_2) + P(BB \cap N_2) = \dfrac{6}{90} + \dfrac{16}{90} + \dfrac{5}{90} = \dfrac{27}{90} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$

La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne $U_2$ avec cette nouvelle expérience est égale à 0,3 ; elle est donc supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne $U_2$ avec l'expérience de la partie A qui était de 0,28.

## Exercice 18 : Dénombrement

**1.** Un tirage est donc un triplet (c'est-à-dire une 3-liste ou un 3-uplet) ordonné d'éléments choisis dans un ensemble $E$ de cardinal $\text{Card}(E) = 8$ (il y a 8 jetons), qui ne s'amenuise pas (car on remet le jeton avant de tirer le suivant, et donc les répétitions sont possibles.)

Le nombre de tirages possibles est donc de : $\text{Card}(E)^3 = 8^3 = 512$.

Il y a 512 tirages possibles.

**2.** **a.** Si on souhaite un tirage sans répétition de numéro, alors, c'est comme si on avait fait un tirage sans remise (un numéro déjà choisi ne peut pas être choisi à nouveau), et donc un triplet ordonné d'éléments choisis dans un ensemble qui s'amenuise.

Il y a donc $\dfrac{8!}{(8-3)!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ tirages possibles sans numéro répété.

*Remarque :* On peut parler d'arrangement, même si ce mot n'est pas explicitement à connaître en terminale.

On peut aussi voir cette valeur comme étant : 8 choix possibles pour le premier numéro du triplet, puis 7 choix possibles pour le deuxième numéro, sachant qu'il doit être différent du premier et enfin 6 choix possibles pour le dernier numéro, qui doit être différent des deux précédents.

**b.** Le nombre de tirages avec au moins une répétition de numéro est donc la différence des deux résultats précédents : $512 - 336 = 176$.

En effet, l'ensemble des tirages possibles est la réunion de deux ensembles disjoints : les tirages sans aucune répétition de numéro et les tirages avec au moins une répétition de numéro.

*Remarque :* On pouvait aussi compter le nombre de tirages avec deux numéros identiques : $8 \times \binom{3}{2} \times 7 = 168$ (huit choix pour le numéro répété, multiplié par $\binom{3}{2}$ façons de placer ces deux numéros identiques dans le triplet, multiplié par sept choix pour le numéro différent des deux premiers) et l'ajouter au nombre de tirages avec trois numéros identiques : 8 (huit choix possibles pour le numéro qui sera répété trois fois), mais dans ce cas, on obtient 176 sans le déduire des questions précédentes.

**3.** Le sac étant opaque et les jetons indiscernables au toucher, chaque sélection d'un jeton dans le sac est une situation d'équiprobabilité, et donc on a une loi équirépartie.

On peut donc présenter la loi de probabilité de la variable aléatoire $X_1$ sous la forme du tableau suivant :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X_1 = x_i)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

**4.** L'espérance de la variable aléatoire $X_1$ est donc donnée par :

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= x_1 \times P(X_1 = x_1) + x_2 \times P(X_1 = x_2) + \ldots x_8 \times P(X_1 = x_8)\\
&= (x_1 + x_2 + \ldots + x_8) \times \frac{1}{8} \quad \text{car la loi est équirépartie}\\
&= (1 + 2 + \ldots + 8) \times \frac{1}{8}\\
&= \frac{1+8}{2} \times 8 \times \frac{1}{8} \quad \text{avec la formule de la somme des premiers termes d'une suite arithmétique}\\
&= 4{,}5
\end{aligned}$$

**5.** On a $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$, et puisque $X_1$, $X_2$ et $X_3$ suivent la même loi de probabilité, alors on en déduit :

$E(S) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 4{,}5 = 13{,}5$

**6.** L'évènement $\{S = 24\}$ n'est réalisé que par le tirage (8 ; 8 ; 8), donc sur les 512 issues possibles de l'expérience aléatoire, une seule est favorable à l'évènement : la probabilité est donc de $\dfrac{1}{512}$ (puisque l'on est en situation d'équiprobabilité).

*Remarque :* On peut aussi dire que l'évènement $\{S = 24\}$ est égal à l'évènement $\{X_1 = 8\} \cap \{X_2 = 8\} \cap \{X_3 = 8\}$.

Et comme les variables aléatoires $X_1$, $X_2$ et $X_3$ sont indépendantes :

$$\begin{aligned}
P(S = 24) &= P(\{X_1 = 8\} \cap \{X_2 = 8\} \cap \{X_3 = 8\}) = P(X_1 = 8) \times P(X_2 = 8) \times P(X_3 = 8)\\
&= \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}
\end{aligned}$$

**7.** **a.**
- Le nombre 24 ne peut être obtenu que par la somme 8 + 8 + 8, qui ne procède que d'un seul tirage (le tirage (8 ; 8 ; 8)).
- Le nombre 23 ne peut être obtenu que par la somme 7 + 8 + 8, cette somme est constituée d'un doublon (le 8) et d'un entier présent une seule fois (le 7).

  Elle peut procéder de trois tirages différents, car il y a $\binom{3}{2} = 3$ façons de placer les deux entiers identiques dans un triplet.

  Les trois triplets conduisant à $\{S = 23\}$ sont : (7 ; 8 ; 8) ; (8 ; 7;8) et (8 ; 8 ; 7).
- Le nombre 22 peut être obtenu comme somme de trois entiers naturels entre 1 et 8 en faisant : 6 + 8 + 8, ou bien en faisant 7 + 7 + 8.

  Chacune de ces sommes est constitué d'un doublon et d'un troisième entier différent, et est donc le résultat de trois tirages différents.

  Il y a donc six tirages donnant 22 (les tirages (6 ; 8 ; 8) ; (8 ; 6 ; 8) ; (8 ; 8 ; 6) ; (8 ; 7 ; 7) ; (7 ; 8;7) et (7 ; 7 ; 8)).

On a donc bien finalement $1 + 3 + 6 = 10$ tirages conduisant au gain d'un lot.

**b.** On est en situation d'équiprobabilité pour les 512 tirages possibles (nombre déterminé à la question **1.**), donc, avec 10 tirages favorables à l'évènement « gagner un lot », la probabilité de gagner un lot est donc de $\dfrac{10}{512} = \dfrac{5}{256}$.

## Exercice 19 : Équations différentielles

**1.** Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

La fonction linéaire $u$ définie par $u(x) = -\dfrac{1}{4}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $u'(x) = -\dfrac{1}{4}$.

La fonction composée $g(u(x)) = ax\mathrm{e}^{u(x)}$ est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle, $g'(u) = a\mathrm{e}^{u(x)} + axu' \times \mathrm{e}^{u(x)} = a\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + ax \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a - \dfrac{ax}{4}\right)$.

Or $g'(x) + \dfrac{1}{4}g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a - \dfrac{ax}{4}\right) + \dfrac{1}{4} \times ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a - \dfrac{ax}{4} + \dfrac{ax}{4}\right) = a\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

Donc $g$ est solution de l'équation différentielle sur $[0\,;\,+\infty[$, si sur cet intervalle :

$a\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff a = 20$, car quel que soit $x$ réel, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \neq 0$.

La fonction $g : x \longmapsto 20x\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ est une solution particulière de l'équation $(E)$.

**2.** On considère l'équation différentielle $(E')$ : $\quad y' + \dfrac{1}{4}y = 0$,

d'inconnue $y$, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

L'équation $(E')$ peut s'écrire $y' = -\dfrac{1}{4}y$ et on sait que les solutions de cette équation $(E')$ sont les fonctions $f$ définies par : $\quad f(x) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

**3.** Les solutions $f$ de l'équation $(E)$ sont telles que pour $x \in [0\,;\,+\infty[$,

$f'(x) + \dfrac{1}{4}f(x) = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ ou d'après la question 1. :

$f'(x) + \dfrac{1}{4}f(x) = g'(x) + \dfrac{1}{4}g(x) \iff f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{4}[f(x) - g(x)]$ soit par linéarité de la dérivation :

$(f-g)'(x) + \dfrac{1}{4}[(f-g](x) = 0$ : ceci signifie que la fonction $f - g$ est solution de $(E')$ c'est-à dire que

$f(x) - g(x) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff f(x) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + g(x)$ ou

enfin $f(x) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + 20x\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff$

$f(x) = (20x + K)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Les solutions de $(E)$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ sont donc les fonctions $f$ définies par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}(20x + K)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

**4.** On a $f(0) = 8 \iff (20 \times 0 + K)\mathrm{e}^{0} = 8 \iff K = 8$, donc :

$f(x) = (20x + 8)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = 4(5x + 2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

## Exercice 20 : Équations différentielles

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle : $(E) \qquad y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

**1.** On a $f(x) - \dfrac{1}{6}[f(x)]^2 = \dfrac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \dfrac{1}{6} \times \dfrac{36}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}$

$$= \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{6}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{6(1+5\mathrm{e}^{-x}) - 6}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} = f'(x)$$

Donc $f$ est bien une solution de l'équation $(E)$.

**2.**

- Les solutions de l'équation $y' = -y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto K\mathrm{e}^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$;
- La fonction constante $x \longmapsto \dfrac{1}{6}$ est la seule fonction constante solution de l'équation à résoudre;
- Les fonctions solutions de l'équation différentielle proposée sont les fonctions définies par :

$$x \longmapsto \frac{1}{6} + K\mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

**3.** **a.** On a donc : $h'(x) = -h(x) + \dfrac{1}{6}$

Or si $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, alors $h'(x) = -\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$.

L'équation précédente devient :

$-\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\dfrac{1}{g(x)} + \dfrac{1}{6}$ soit en multipliant par $[g(x)]^2$

$-g'(x) = -g(x) + \dfrac{1}{6}[g(x)]^2 \iff g'(x) = g(x) - \dfrac{1}{6}[g(x)]^2$ ce qui signifie que la fonction $g$ est une solution de l'équation différentielle $y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

**b.**

$$g_m(x) = \frac{6}{1+6m\mathrm{e}^{-x}}.$$

Puisque $m$ est positif, alors $6m\mathrm{e}^{-x}$ l'est aussi et $1 + m\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 > 0$, donc finalement $g_m(x) > 0$ quel que soit le réel $x$. La fonction $h_m$ définie par $h_m(x) = \dfrac{1}{g_m(x)}$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

Or $h_m(x) = \dfrac{1}{g_m(x)} = \dfrac{1+6m\mathrm{e}^{-x}}{6} = \dfrac{1}{6} + m\mathrm{e}^{-x}$ et on reconnait une solution de l'équation différentielle de la question **2.**.

On a ensuite vu à la question **3. a.** que si la fonction $h_m$ était une solution de $y' = -y + \dfrac{1}{6}$, alors $g_m$ était elle solution de l'équation $y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

## Exercice 21 : Intégrale

**1.** $f$ est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, donc, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0)$.
Or $f(0) = 0$ donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

**2.** Soit l'intégrale : $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$f$ étant positive sur $\mathbb{R}^+$ l'est sur l'intervalle $[2; 4]$, donc $I$ est égale (en unités d'aire) à l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de $f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

**3.** On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;\,4]$, on a l'encadrement : $0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25$.

Sur l'intervalle $[2\,;\,4]$, l'intégration conserve l'ordre donc :

$$0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25 \Longrightarrow \int_2^4 (0{,}5x-1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 (0{,}25x+0{,}25)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \left[\frac{x^2}{4} - x\right]_2^4 \leqslant I \leqslant \left[\frac{x^2}{8} + 0{,}25x\right]_2^4$$

$$\Longrightarrow 4 - 4 - (1-2) \leqslant I \leqslant 2 + 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow 1 \leqslant I \leqslant 2$$

## Exercice 22 : Intégrale

**1.** **a.** $f$ est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 4x-2$ et $v(x) = e^{-x+1}$.

On a donc $u'(x) = 4$ et $v'(x) = -1 \times e^{-x+1}$.

$f' = u'v + v'u$ donc, pour tout réel $x$ positif :

$f'(x) = 4 \times e^{-x+1} - 1 \times e^{-x+1} \times (4x-2) = (4-4x+2)e^{-x+1} = (-4x+6)e^{-x+1}$.

**b.** Déterminons le signe de $-4x+6$ : $\quad -4x+6 > 0 \iff 6 > 4x$

$$\iff \frac{3}{2} > x$$

les images pertinentes sont : $\quad f(0) = (4\times 0-2)e^{-0+1} = -2e$

et $\quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(4\times\frac{3}{2}-2\right)e^{-\frac{3}{2}+1} = 4e^{-\frac{1}{2}}$ $\quad$ (la limite en $+\infty$ est admise).

On a donc le tableau :

| $x$ | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $-4x+6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| signe de $e^{-x+1}$ | | $+$ | | $+$ | |
| signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| variations de $f$ | $-2e$ | $\nearrow$ | $4e^{-\frac{1}{2}}$ | $\searrow$ | $0$ |

**c.** Pour tout réel $x$ positif on a :

$f''(x) = -4 \times e^{-x+1} - 1 \times e^{-x+1} \times (-4x+6) = (-4+4x-6)e^{-x+1} = (4x-10)e^{-x+1}$

Déterminons le signe de $4x-10$ : $\quad 4x-10 > 0 \iff 4x > 10$

$$\iff x > \frac{5}{2}$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $4x-10$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| signe de $e^{-x+1}$ | | $+$ | | $+$ | |
| signe de $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

La fonction $f$ est donc concave sur $\left[0\,;\,\frac{5}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Le point A, d'abscisse $\frac{5}{2}$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de $f$.

**2.** **a.** Soit $F$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)e^{-x+1}$ avec $a$ et $b$ deux nombres réels.

$F$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.

Pour tout réel $x$ positif on a :

$F'(x) = 1 \times e^{-x+1} - \times e^{-x+1} \times (ax+b) = (a-ax-b)e^{-x+1} = (-ax-b+a)e^{-x+1}$

$F$ est une primitive de $f \iff F' = f$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (-ax-b+a)e^{-x+1} = (4x-2)e^{-x+1}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (-ax-b+a) = (4x-2) \quad \text{car} \quad e^{-x+1} > 0$$

$$\iff \begin{cases} -a = 4 \\ a-b = -2 \end{cases} \quad \text{par identification des coefficients}$$

$$\iff \begin{cases} a = -4 \\ b = a+2 = -4+2 = -2 \end{cases}$$

$F(x) = (-4x-2)e^{-x+1}$ est une primitive de $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

**b.** $I = \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,dx = \left[(-4x-2)e^{-x+1}\right]_{\frac{3}{2}}^{8} = (-4\times 8-2)e^{-8+1} - \left(-4\times\frac{3}{2}-2\right)e^{-\frac{3}{2}+1} = -34e^{-7} + 8e^{-\frac{1}{2}}$

$I \approx 4{,}821$ soit $4{,}82$ à $10^{-2}$ près.

**3.** **a.** La hauteur du point de départ est égale à $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{-\frac{1}{2}} \approx 2{,}426$

soit $2{,}43$ m au centimètre près.

**b.** L'aire, en unité d'aire, est égale à l'intégrale $I$ calculée à la question **3.**

L'unité est le mètre, une unité d'aire est donc égale à $1\,m^2$.

On veut donc couvrir une surface de : $\frac{75}{100} \times 4{,}82\,m^2$ soit environ $3{,}62\,m^2$.

De plus : $\frac{3{,}62}{0{,}8} \approx 4{,}525$

Il faudra donc 5 bombes de peinture pour réaliser cette œuvre.